CHAPITRE E1

Systèmes linéaires

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de la PTSI : après avoir défini ce qu'est un système linéaire continu invariant, on rappellera les principaux outils à disposition pour les étudier. Enfin, on s'intéressera à un critère particulier : la stabilité des systèmes.

I - Définitions et propriétés

I.A - Système Linéaire, Continu et Invariant

I.A.1 - Système linéaire

Définition (Système linéaire)

Un système est dit **linéaire** s'il vérifie le principe de superposition.

Principe de superposition

Exemples :

▷ Loi d'Ohm $u = Ri$. Arbitrairement, choisissons u la sortie et i l'entrée.
Si R est parcourue par un courant i_1, la tension à ses bornes sera $u_1 = Ri_1$
De même, si R est parcourue par un courant i_2, la tension sera $u_2 = Ri_2$.
Si R est parcourue par $i = \lambda i_1 + \mu i_2$, alors la tension à ses bornes sera
$u = Ri = R(\lambda i_1 + \mu i_2) = \lambda Ri_1 + \mu Ri_2 = \lambda u_1 + \mu u_2$ ✓ *(d'où "dipôle linéaire")*

▷ Puissance dissipée par une résistance $\mathcal{P} = Ri^2$. Arbitrairement, choisissons $\mathcal{P}$ la sortie et i l'entrée.
Si R est parcourue par un courant i_1, la puissance dissipée sera $\mathcal{P}_1 = Ri_1^2$
De même, si R est parcourue par un courant i_2, la puissance dissipée sera $\mathcal{P}_2 = Ri_2^2$.
Si R est parcourue par $i = \lambda i_1 + \mu i_2$, alors la puissance dissipée sera
$\mathcal{P} = Ri^2 = R(\lambda i_1 + \mu i_2)^2 = \lambda^2 Ri_1^2 + \mu^2 Ri_2^2 + 2\lambda\mu Ri_1 i_2 \neq \lambda\mathcal{P}_1 + \mu\mathcal{P}_2$ ⊗ *non linéarité*

Remarque
Un système linéaire est un **modèle** : la plupart des systèmes linéaires ne le sont que dans un domaine donné (on parle de domaine de linéarité)

I.A.2 - Système continu et invariant

Définition (Système continu)

Un système est dit **continu** s'il traite des grandeurs ($e(t)$, $s(t)$) définies pour tout t et pouvant prendre n'importe quelle valeur (en opposition aux signaux numériques qui sont discrets)

Définition (Système invariant temporellement)

Remarque

Un système invariant temporellement est un **modèle** : la plupart des systèmes ont des composants qui subissent les effets du temps. Cependant sur les durées des expériences, on peut considérer ces effets comme négligeables.

I.B - Exemple de SLCI : système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Propriété

Un système qui vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un SLCI.

Démonstration

Remarque ⚠

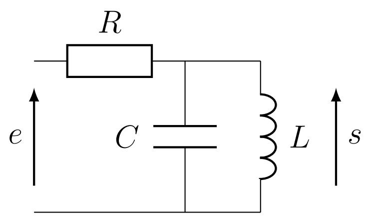
Ce n'est pas une équivalence ! Il existe des SLCI qui ne sont PAS régi par une ED linéaire à coefficients constants *(par exemple l'opérateur retard)*.
MAIS si un SLCI est régi par une ED, alors elle sera nécessairement linéaire à coefficients constants

Méthode - Établir l'ED dans un circuit électronique

Rappel - Formes canoniques des EDL à coefficients constants des 1$^{\text{er}}$ et 2$^{\text{ème}}$ ordre

Application - SF1

Déterminer l'équation différentielle satisfaite par s



Propriété IMPORTANTE

Corollaire
Si l'entrée d'un système est sinusoïdale, mais que la sortie ne l'est pas ou est sinusoïdale à une fréquence différente, alors on peut en déduire que le système n'est pas linéaire

II - L'outil principal pour étudier les systèmes linéaires : la fonction de transfert

II.A - Rappels RSF

Définition (RSF et représentation complexe)

Propriétés - rappels

En RSF, l'entrée des SLCI est sinusoïdale, donc la sortie aussi, de même pulsation.
⇒ pour connaître la sortie (c'est généralement ce qu'on recherche), il suffit de connaître son **amplitude** et sa **phase à l'origine**.
C'est la **fonction de transfert** qui permet de déterminer ces caractéristiques en fonction de celles de l'entrée.

Définition (Fonction de transfert)

Opération complexe		
Vocabulaire		
Expressions		
Information		

Méthode - Détermination de la réponse temporelle en RSF

Si on considère un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\Omega t + \psi)$, alors le signal de sortie s'écrit

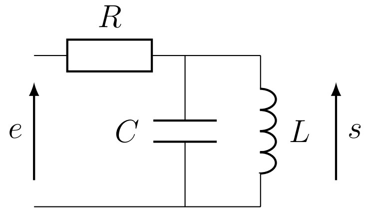
II.B - Obtention de la fonction de transfert

Méthode - Obtenir la fonction de transfert via les impédances complexes

Méthode - Obtenir la fonction de transfert via l'ED

Application - SF1

Via les deux méthodes, déterminer la fonction de transfert du système suivant :



Remarque

La méthode fonctionne aussi pour trouver l'ED si on connait la fonction de transfert !

$\Rightarrow$ à vérifier sur l'exemple de l'appli à la maison.

II.C - Représentation de la fonction de transfert

Définition (Diagramme de Bode)

Souvent, on vous demandera de tracer le diagramme asymptotique plutôt que le diagramme réel (sauf en TP !).

Méthode - Tracer un diagramme de Bode asymptotique

Application - SF2

On reprend le circuit du SF1. Tracer le diagramme de Bode asymptotique.

II.D - Généralisation : intérêt de la fonction de transfert

II.D.1 - Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

DSF

Tout signal périodique de pulsation ω peut se décomposer comme une somme de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de ω :

cf script Python sur le site

Vocabulaire

Exemples de signaux et spectres associés

▷ signal sinusoïdal pur :

▷ signal sinusoïdal avec une composante continue :

▷ somme de deux signaux sinusoïdaux ($f_2 \ll f_1$) :

▷ signal créneau :

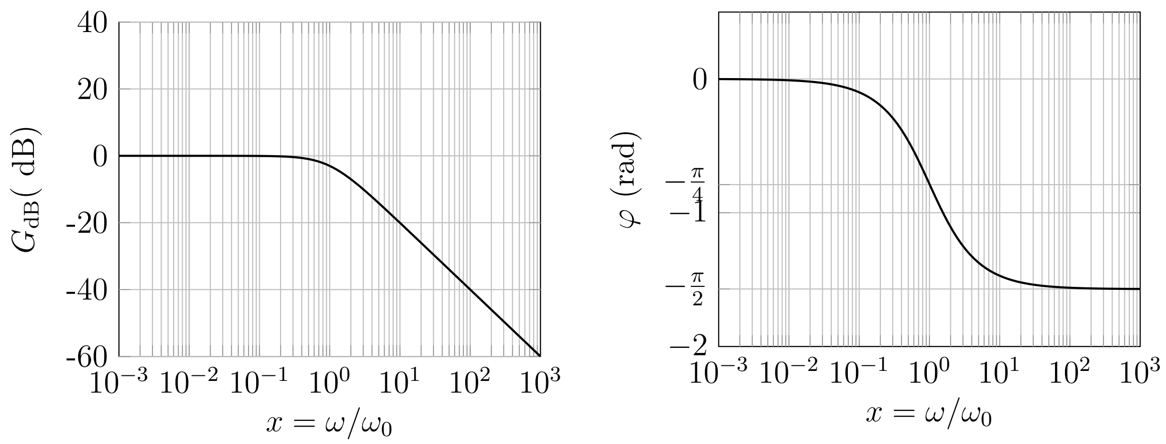
▷ signal triangle :

A RETENIR

En quoi est-ce une excellente nouvelle ?

Application - SF3

On considère un filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous :



1. Déterminer la nature et l'ordre du filtre.
2. On envoie en entrée le signal de la forme suivante :

$$e(t) = E_0(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t))$$

Avec $E_0 = 1$ V, $\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100\omega_0$. Donner l'expression temporelle du signal de sortie.

II.D.2 - Exploitation qualitative

Méthode - Expliquer ou anticiper l'effet d'un filtre sur un signal

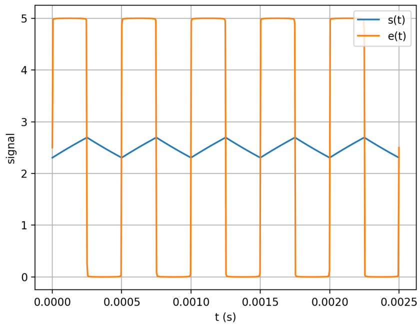
Application - Effet d'un filtre passe-bas d'ordre 1 sur un signal créneau

cf script Python sur le site

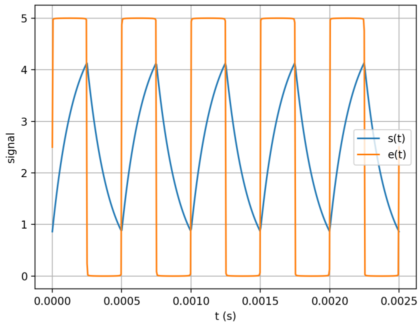
On considère un passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure f_c. On envoie un signal créneau de fréquence $f_e = 2$ kHz.

Expliquer les signaux obtenus en sortie pour les 3 expériences :

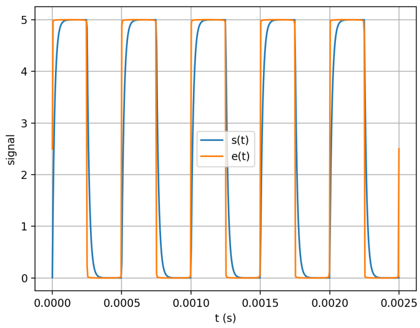
Exp 1 : On impose $f_c = 100$ Hz.



Exp 2 : On impose $f_c = 1$ kHz.



Exp 3 : On impose $f_c = 10$ kHz.



III - Stabilité des SLCI

III.A - Définition

Définition (Système stable)

Un système est **stable** si sa réponse à un régime forcé borné est bornée.

Rappel - Solutions d'une EDL à coefficients constants

Propriété

III.B - Premier ordre

Stabilité d'un premier ordre

Démonstration

III.C - Deuxième ordre

Stabilité d'un deuxième ordre

Démonstration